第５講　導体棒の運動（電磁気学）

1　（解答用紙２）

図１のように，２本の十分に長い導体のレール P，Q が，水平面と θ の角度をなして互いに平行に設置されている。レールの太さと抵抗は無視できるとする。レール間の距離は L である。これらのレール上には，長さ L，質量 m，抵抗 R の十分に細い N 本の棒 1, 2, 3, …, N が下から順にレールに対して垂直に置かれている。それらはレールに対して垂直のまま，レールに沿って摩擦なく滑る。磁束密度 $B\ (B>0)$ の一様な磁場が鉛直上向きにかけられている。はじめ，すべての棒は固定されている。以下では，空気抵抗，および棒とレールを流れる電流により発生する磁場の影響は無視する。重力加速度の大きさを g とする。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　棒１の固定をはずしたところ，棒１はレールに沿って下に動き始め，しばらくして一定の速さ u になった。

(1)　レール P から Q に向かって棒１を流れる電流 I を u を用いて表せ。

(2)　u を求めよ。

Ⅱ　次に，棒１が他の棒から十分離れた状態で，棒１をレールに沿って上方向に一定の速さ w で動かし続けた。このとき，棒２から棒 N の固定をすべてはずしたところ，それらは動かなかった。w を求めよ。

Ⅲ　すべての棒を固定した状態から始めて，棒 N 以外の固定を下から順番にはずしていった。しばらくして，棒 N 以外の速さはすべて u' となった。u' を求めよ。

Ⅳ　設問Ⅲの状況で，さらに棒 N の固定もはずした。n 番目の棒 $(1 \leqq n \leqq N)$ のレールに沿った速度を v_n，加速度を a_n とする。ただし，速度と加速度はレールに沿って滑り降りる向きを正とする。

(1)　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N$ を求めよ。

(2)　１から $N-1$ までの整数 n に対して，$a_{n+1}-a_n=-k(v_{n+1}-v_n)$ が成り立つ。定数 k を求めよ。

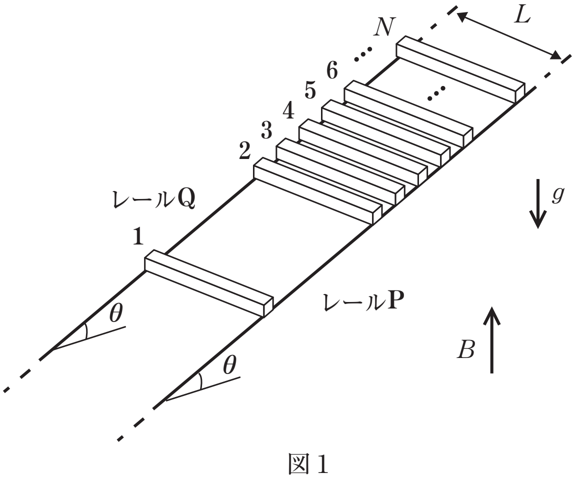
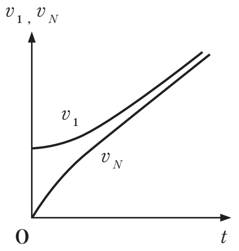


図１

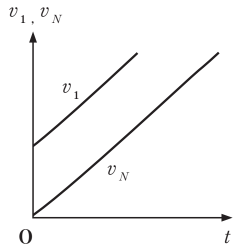
＜ Note ＞

(3)　棒 N の固定をはずしてからの経過時間 t に対して，v_1 と v_N はどのように変化するか。以下の説明とグラフの中から最も適当なものを選べ。なお，一般に加速度 a および速度 v をもつ物体の運動が $a=-Kv$（K は正の定数）を満たす場合，v は時間の経過とともに 0 に近づく。

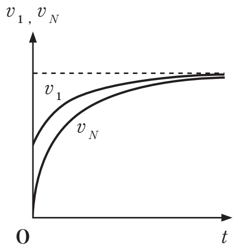
ア．v_1 と v_N は最終的にはともに増加し，その差は小さくなる。



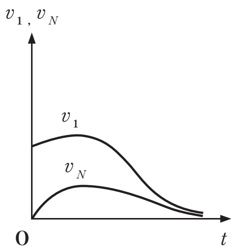
イ．v_1 と v_N は一定の差を保ったまま，ともに増加する。



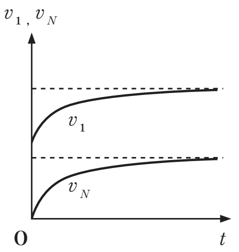
ウ．v_1 と v_N はともに増加し，共通の定数に近づく。



エ．v_1 と v_N は最終的にはともに減少し，0 に近づく。



オ．v_1 と v_N はともに増加し，異なる定数に近づく。



(4)　棒 1 と棒 N の間の距離は時間が経つにつれてどのように変化するか。以下の中から最も適当なものを選べ。

ア．大きくなる　　イ．一定値に近づく　　ウ．小さくなる

＜ Note ＞

2　（解答用紙２）

図１のように，長さ L，質量 M の導体棒を，長さ l の導線２本で吊り下げたブランコを考える。ブランコの支持点は摩擦なく自由に回転できるような，なめらかな軸受になっている。導線には，抵抗値 R の抵抗がつながれており，さらに電源なし，直流電源，交流電源をスイッチで切り替えられるようになっている。このブランコの導体棒は鉛直上向きの一様磁場（磁束密度 B）中を運動するものとする。鉛直下向きからのブランコの振れ角を θ，重力加速度の大きさを g として以下の設問に答えよ。ただし，導体棒や導線は変形しないものとし，それらの抵抗や太さは無視できるものとする。また，導線の質量，電源の内部抵抗も無視できるものとする。導体棒以外の導線や電気回路は一様磁場の外にあり影響を受けない。自己インダクタンス，大気による摩擦は無視できるものとする。ブランコの振動周期に対する抵抗の効果は考慮しなくて良い。

Ⅰ　まず, スイッチを電源なしの位置につなぐ。ブランコを $\theta=\alpha$ の位置まで持ち上げてそっと離したところ，ブランコは長い時間振動しながら次第に振幅を小さくしていき，十分に時間が経った後には $\theta=0$ の位置でほぼ静止した。ただし α は正の微小値である。

(1)　ある瞬間に，ブランコは $\theta=0$ の位置を速さ v で通過した。このとき，導体棒に流れている電流の大きさ I_1 を求めよ。

(2)　ブランコの振動振幅がだんだん小さくなっていくのは，導体棒の力学的エネルギーが抵抗のジュール熱として消費されていくからだと考えることができる。最終的にブランコが静止するまでの間に，抵抗で発生したジュール熱の合計値 Q を求めよ。

(3)　もし抵抗値を $2R$ に変更したとすると，変更前に比べて振動の振幅が半分になるまでにかかる時間はどうなるか。以下のア～ウから適当なものを一つ選んで答えよ。

ア．長くなる　　イ．変わらない　　ウ．短くなる

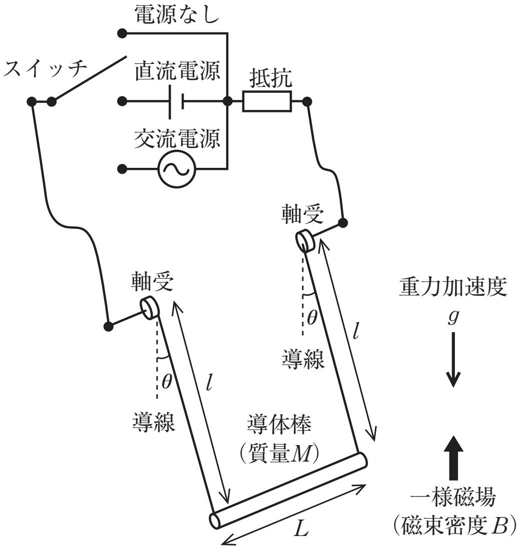


図１

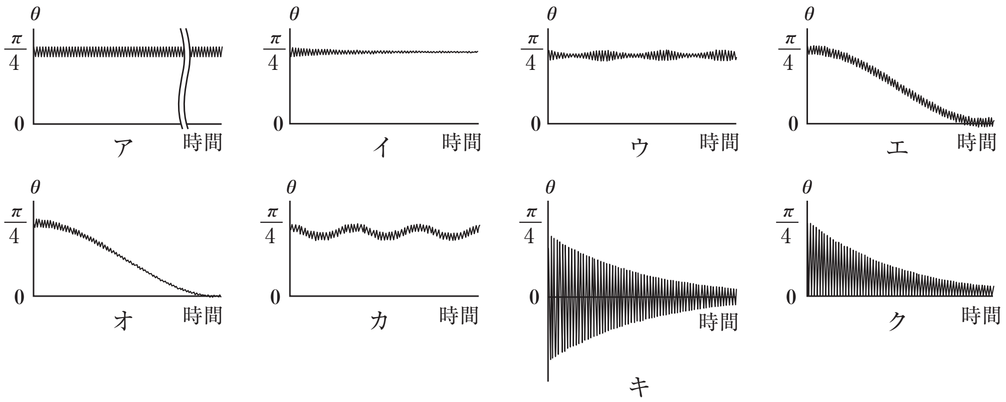
< Note >

Ⅱ　次に，スイッチを直流電源に切り替え，一定電圧を加えたところ，ブランコを $\theta=\frac{\pi}{4}$ の位置で静止させることができた。

(1)　このときに導体棒に流れている電流の大きさ I_2 を求めよ。

(2)　さらにその状態からブランコを $\theta=\frac{\pi}{4}+\delta$ の位置まで持ち上げてそっと離したところ，ブランコは振動を始めた。短時間ではこの運動は単振動とみなしてよい。その周期 P を求めよ。ただし，δ は正の微小値である。

(3)　その後，長時間観察すると，このブランコの振動はどのようになるか。以下のア～クのグラフから最も適当なものを一つ選んで答えよ。



Ⅲ　最後に，ブランコを $\theta=0$ の位置に戻し，スイッチを交流電源に切り替えた。電源の周期を設問Ⅰの場合のブランコ振動の周期（T とする）と同じにした時，ブランコは揺れはじめ，やがて一定振幅（最大振れ角）β で単振動を続けるようになった。このときの θ は，時間 t を用いて $\theta=\beta\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ と書くことができる。ただし β は正の微小値である。

(1)　ブランコが一定振幅で単振動をしているときの誘導起電力 V を求めよ。ただし，解答に際して起電力の向きは問わない。また，$\sin\theta$ は θ と近似して良い。

(2)　交流電源の電圧の振幅 A を求めよ。ただし，ブランコの運動に起因する電磁誘導の効果と，交流電源が接続されていることによる効果がちょうど打ち消し合っていると考えれば良い。

(3)　交流電源を設問Ⅲ(2)と同じにした状態で，抵抗値を $2R$ に変更した。十分に時間が経った後のブランコの最大振れ角の大きさ β' を β を用いて表せ。

＜ Note ＞

第５講　確認テスト

1 （解答用紙２）

図１のように，直方体の導体Ｐ，Ｐ′，Ｑ，Ｑ′が，水平な xy 面上に y 軸と平行に設置されている。これらの導体は十分細長く，その太さは無視できるとする。導体ＰとＰ′およびＱとＱ′の間には絶縁体がはさまれており，全体で間隔 l の２本の平行なレールをなしている。導体Ｐ，Ｑの右端はそれぞれ導体Ｑ′，Ｐ′の左端と導線で交差して結ばれている。二つの絶縁体は x 軸方向の平行移動でちょうど重なりあう位置にある。

２本のレール上には，質量が等しく，ともに抵抗 R を持つ細い棒１，２が x 軸に平行に置かれている。それらは y 軸方向に摩擦なしに滑ることができ，棒２の方が棒１より右にあって接触しないものとする。系全体には磁束密度 B の一様な磁界が鉛直上向きにかけられている。

以下では棒を流れる電流は x 軸正方向，棒に働く力とその速度は y 軸正方向を正とする。棒と絶縁体以外の電気抵抗は無視できるとする。また，棒を流れる電流により発生する磁界の影響も無視できるとする。

Ⅰ　棒１も棒２も導体Ｐ，Ｑ上にあるとして以下の問に答えよ。

(1)　棒１を導体Ｐ，Ｑに固定し，棒２だけを一定速度 v_0 で動かした。この時，棒２に流れる電流 I_0 を求めよ。

(2)　棒１の速度が u，棒２の速度が v である時，棒１に働く力 F_1，棒２に働く力 F_2 を求めよ。

Ⅱ　棒１が導体Ｐ，Ｑ上，棒２が導体Ｐ′，Ｑ′上にあるとして以下の問に答えよ。

(1)　棒１の速度が u，棒２の速度が v である時，棒２に流れる電流 I を求めよ。

(2)　Ⅱ(1)の状況で，Ｐの電位はＰ′の電位よりどれだけ高いか。

Ⅲ　ある時刻において棒１，２は同じ正の速度を持ち，棒２はＰ，Ｑの右端，棒１はそれより左にあったとする。その後棒１，２は間隔を一定に保ったまま右へ進んでいった。二つの棒の間隔が絶縁体の長さより大きいとすると，次の四つの状況が順次起こる。

(a)　棒１はＰ，Ｑ上で棒２は絶縁体上

(b)　棒１はＰ，Ｑ上で棒２はＰ′，Ｑ′上

(c)　棒１は絶縁体上で棒２はＰ′，Ｑ′上

(d)　棒１，棒２ともにＰ′，Ｑ′上

それぞれの場合に，棒１の速度（棒２の速度に等しい）はどうなるか。以下の(ア)，(イ)，(ウ)のいずれかを選んで答えよ。

(ア)　加速する　　(イ)　減速する　　(ウ)　変わらない

＜ Note ＞

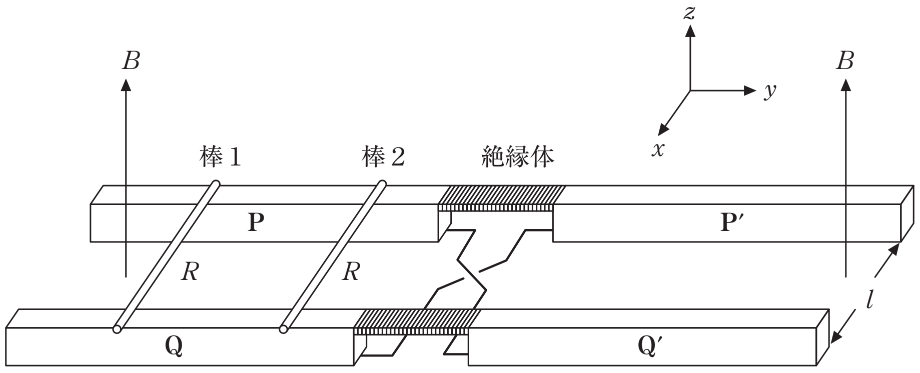


図１

＜ Note ＞

第５講　解答

1

Ⅰ　(1)　$\dfrac{(N-1)uBL\cos\theta}{NR}$

(2)　$\dfrac{NmgR\sin\theta}{(N-1)(BL\cos\theta)^2}$

Ⅱ　$\dfrac{NmgR\sin\theta}{(BL\cos\theta)^2}$

Ⅲ　$\dfrac{NmgR\sin\theta}{(BL\cos\theta)^2}$

Ⅳ　(1)　$Ng\sin\theta$

(2)　$\dfrac{(BL\cos\theta)^2}{mR}$

(3)　ア

(4)　イ

2

Ⅰ　(1)　$\dfrac{BLv}{R}$

(2)　$Mgl(1-\cos\alpha)$

(3)　ア

Ⅱ　(1)　$\dfrac{Mg}{BL}$

(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{2}\,g}}$

(3)　イ

Ⅲ　(1)　$\dfrac{2\pi BLl\beta}{T}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

(2)　$\dfrac{2\pi BLl\beta}{T}$

(3)　$\beta'=\beta$

第５講　確認テスト

【解答】

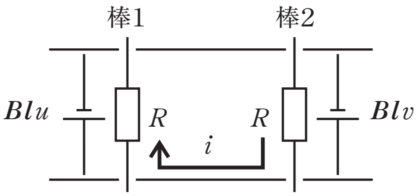
Ⅰ　(1)　$\dfrac{Blv_0}{2R}$　　(2)　$F_1=\dfrac{B^2l^2(v-u)}{2R}$　　$F_2=-\dfrac{B^2l^2(v-u)}{2R}$

Ⅱ　(1)　$\dfrac{Bl(v+u)}{2R}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}Bl(v-u)$

Ⅲ　(a)　(ウ)　　(b)　(イ)　　(c)　(ウ)　　(d)　(ウ)

【解説】

Ⅰ



(1)　棒２に生ずる起電力はBlv_0　　∴　$I_0=\dfrac{Blv_0}{2R}$

(2)　棒に流れる電流をiとして

$$2R\cdot i=Blv-Blu \qquad \therefore\quad i=\frac{Bl(v-u)}{2R}$$

よって，

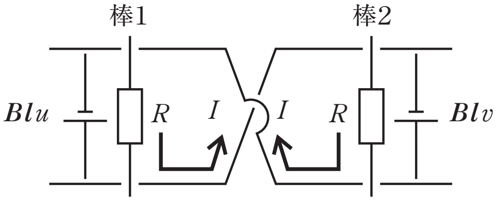
$$F_1=+iBl=\frac{B^2l^2(v-u)}{2R}$$

$$F_2=-iBl=-\frac{B^2l^2(v-u)}{2R}$$

Ⅱ

(1)　棒１にはBlu，棒２にはBlvの起電力が生ずるので，

$$2RI=Blu+Blv \qquad \therefore\quad I=\frac{Bl(v+u)}{2R}$$



(2)　棒２に注目。

$$-RI+Blv=\frac{1}{2}Bl(v-u)$$

Ⅲ

(a)(c)(d)　電流が流れないので，棒には磁場からの力は作用しない。　(ウ)

(b)　棒１，２ともに，速度と逆向きに磁場からの力が作用。(イ)